

一类不确定非线性系统的逆最优输出调节

孟桂芝, 吕 岩

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:针对一类带有未知参数向量和外界扰动的非线性系统,研究了其在线性外系统驱动下的逆最优输出调节问题。首先依据调节器方程是可解的条件,得到调节器方程的解,再通过坐标变换,将不确定非线性系统的输出调节问题转化为镇定问题。接着对增广系统建立与内模相关的辅助系统,然后结合逆最优增益配置定理,设计了与辅助系统相关的内模和状态反馈逆最优自适应控制器,并提出了与控制器和辅助系统相关的新的目标泛函。新设计的控制器不仅使得闭环系统中的全部信号都是半全局最终一致有界,而且还能够保证新提出的目标泛函达到最小。最后通过仿真算例验证了所设计控制器的可行性,与已有的文献进行对比,可以发现采用逆优化方法所得出的跟踪误差收敛更快。

关键词:非线性系统;输出调节;内模;逆最优控制

DOI:10.15938/j.jhust.2023.04.018

中图分类号: TP271 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)04-0145-07

Inverse Optimal Output Regulation for a Class of Uncertain Nonlinear Systems

MENG Guizhi, LÜ Yan

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: For a class of nonlinear systems with unknown parameter vector and disturbance, the inverse optimal output regulation problem driven by a linear exosystem is researched. In the first place, on account of the condition that the regulator equation is solvable, one can get the solution of the regulator equation. Afterwards the output regulation problem of the uncertain nonlinear systems is turned into a nonlinear stabilization problem by the state transformation and the internal model. Then an auxiliary system is constructed for the augmented system and the auxiliary system is connected with the internal model. Furthermore, by combining the inverse optimal gain assignment theorem, a new internal model and state feedback inverse optimal controller which are connected with the auxiliary system are designed, and based on the auxiliary system and the controller a new cost function is proposed. The novel control scheme we have raised in this work can not only make all of the signals in the closed loop systems be semi-global uniformly ultimately bounded, but also minimize the proposed cost function. Finally, a simulation case is raised to testify the reasonability of the new raised controller. The tracking error is smaller than the existing references by employing the inverse optimal method.

Keywords: nonlinear system; output regulation; internal model; inverse optimal control

收稿日期: 2022-03-22

基金项目: 国家重点研发计划(2019YFB2006400); 黑龙江省自然科学基金(LH2020F010); 黑龙江“百千万”工程科技重大专项(2020ZX10A03)。

作者简介: 吕 岩(1997—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 孟桂芝(1979—), 女, 博士, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: menggz13@163.com.

0 引言

近年来,输出调节问题的研究一直是一个热点问题,其目标是在控制系统受到外部干扰时,设计控制器,在保证闭环系统稳定性的同时,还能使得系统的输出渐近跟踪参考信号或抑制扰动,其中扰动信号和参考信号均是由外系统产生的。许多实际问题都可以归结为输出调节问题,例如高速列车的震动抑制问题可以简化成输出调节问题。早期的输出调节问题主要是针对线性系统,随着内模原理的产生^[1-3],该问题已经得到了很好的解决^[4-6]。在实际工程系统中,几乎所有的系统都具有非线性,特别存在参数、未建模动态等不确定性会对本身产生极大影响,故对不确定非线性系统的输出调节问题的研究具有实际意义^[7-9]。文[10]采用新的参数划分技术,解决了含有高频增益和未知参数的非线性系统的输出调节问题。但在文[10]中假设高频增益信号是已知的,这个假设比较严格,因此文[11]在高频增益信号和控制系数未知时,采用自适应反步控制和 Nussbaum 增益技术设计了一个输出反馈控制器,解决了其输出调节问题。然而文[10-11]并没有关注到当控制系统内部存在扰动和未建模动态的情况,而在实际工程中,这个扰动会形成震荡对系统产生影响,所以文[12]对一类含有未知参数向量、未建模动态和扰动的系统,基于自适应内模技术以及动态面控制方法,设计了状态反馈控制器,最终解决其输出调节问题。但是上述文献并没有考虑非线性系统的最优控制问题。

最优控制理论是指在一定约束条件下寻求控制使得给定的系统的性能指标达到最优。文[13]采用非线性系统线性化的方法,将一类不确定非线性系统的最优控制问题转换成了具有参数不确定的线性系统的二次型最优控制问题,进而得到原非线性系统的最优控制。逆优化控制作为一种优化控制方法^[14-15],克服了在解决非线性优化控制问题过程中需要解 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程的难点,它不是通过确定的目标泛函最小得出控制器,而是在设计控制 Lyapunov 函数 (CLF) 的过程中得到控制器,同时此控制器可保证目标泛函达到最小。文[16-17]采用逆优化的思想解决了含有未知参数向量的非线性系统的镇定问题。但文[16-17]都是假设系统中的非线性动态是已知的情况,适用范围有限,故文[18-19]利用模糊逻辑去逼近非线性

系统中存在的未知非线性函数,基于状态可测和部分状态可测两种情况,设计了自适应模糊逆最优状态反馈控制器和逆最优输出反馈控制器。需要注意的是[14-19]利用逆最优方法解决的都是非线性系统的镇定问题。而在实际应用中,由于资源有限,实现快速跟踪和抑制扰动可以有效的节省材料,如航天器姿态跟踪控制,在这过程中要求消耗燃料最少,或是燃料消耗和使用时间的组合达到最优,因此对最优输出调节问题的研究是必要的。文[20]将逆优化方法应用到具有最小相位的非线性系统中,解决了其最优输出调节问题。但需要注意的是文[20]并没有考虑到控制系统内部存在扰动和未知参数向量的逆最优输出调节的问题。

本文针对一类由线性外系统驱动的非线性系统,在系统中存在未知参数向量和扰动时,讨论其逆最优输出调节问题。与文[17]的不同之处是本文研究的是输出调节问题,即存在外系统的情况,而不是镇定问题。与文[20]相比,本文还考虑了系统中存在未知参数向量和外界扰动的情况。本文的优势在于不仅给出了与文[17]不同的有意义的目标泛函,而且还设计与辅助系统相关的内模和新的状态反馈逆优化控制器,该控制器不仅能使提出的目标泛函最小,而且还能使闭环系统中全部信号半全局最终一致有界。最后通过仿真验证了本文方法的可行性,并且与文[12]所使用的方法进行对比发现本文所设计的控制策略能使得跟踪误差收敛更快。

1 问题描述

考虑如下系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1} + f_i^T(\Xi_i)\theta + g_i(\Xi_i)d(t) + D_i(w) \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n &= u + f_n^T(\Xi_n)\theta + g_n(\Xi_n)d(t) + D_n(w) \\ y &= \xi_1 \\ e &= y - R(w) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u \in \mathbf{R}$ 为控制输入; $y \in \mathbf{R}$ 为输出; $\theta \in \mathbf{R}^r$ 代表未知的参数向量; $\Xi_i = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i]^T \in \mathbf{R}^i$; f_i, g_i 为已知光滑有界的非线性函数; $d(t)$ 为系统内部产生的未知有界扰动; $D_i(w), R(w)$ 分别表示外部扰动以及参考输入; e 为跟踪误差; w 由如下系统产生

$$\dot{w} = Sw \quad (2)$$

注: 含有未知参数的输出调节问题在很多实际

问题中都是存在的,例如飞行器飞行姿态与抑制扰动问题,在建立飞行器姿态动力学方程时,转动惯量中可能会存在不确定的参数,同时飞行器也可能受到外界干扰力矩的影响^[9],该问题即可简化为本文所提出的非线性系统的输出调节问题。

假设1^[12] 外系统(2) 是中性稳定的。

控制目标:对于控制系统(1) 以及外系统(2),若假设1 成立,设计一个状态反馈逆最优控制器 u ,使系统(1) 的输出 y 可以渐近跟踪参考信号 $R(w)$,使得所给定的目标泛函最小。

根据文[12] 易知关于控制系统(1) 和外系统(2) 的输出调节器方程存在一个全局定义的解,满足

$$\left. \begin{aligned} \pi_1(w) &= R(w) \\ \dot{\pi}_i &= \pi_{i+1} + f_i^T(\Pi_i)\theta + g_i(\Pi_i)d(t) + D_i(w) \\ i &= 2, \dots, n-1 \\ \dot{\pi}_n &= f_n^T(\Pi_n)\theta + g_n(\Pi_n)d(t) + D_n(w) + \alpha(w) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $\Pi_i = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i]^T \in R^i$ 。定义坐标变换 $x_i = \xi_i - \pi_i, i = 1, 2, \dots, n$,可得到如下闭环系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + F_i^T\theta + G_i d(t), i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u - \alpha(w) + F_n^T\theta + G_n d(t) \\ e &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $F_i = f_i(\Xi_i) - f_i(\Pi_i), G_i = g_i(\Xi_i) - g_i(\Pi_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。由 f_i 有界可知存在常数 L ,使得 $|F_i| \leq L$ 。这样可将控制系统(1) 和外系统(2) 的输出调节问题变为式(4) 的镇定问题。

2 内模设计

假设2^[12] 存在正整数 q 和实数组 $a_0, \dots, a_{q-1}$ 使得

$$L_{sw}^q \alpha(w) = a_0 \alpha(w) + a_1 L_{sw}^1 \alpha(w) + \dots + a_{q-1} L_{sw}^{q-1} \alpha(w)$$

成立,其中 $L_{sw}^i (i = 1, \dots, q)$ 为李导数算子。

当假设2 成立时,存在一个内模,使得具有输出 $\alpha(w)$ 的线性外系统被嵌入到如下所示的内模标准参数形式中

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= (M + N\psi)\eta \\ \alpha(w) &= \psi\eta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $M \in R^{m \times m}$ 为 Hurwitz 矩阵; (M, N) 为可控矩阵对。

对于内模的标准参数形式(5),依据确定性等价原则,可以得到误差形式的内模系统表达式

$$\dot{\hat{\eta}} = (M + N\psi)\hat{\eta} + \chi(\cdot) \quad (6)$$

式中 $\chi(\cdot)$ 为待设计的函数。

3 自适应控制器设计

定义函数 $\gamma(v) = v^2/\mu, l\gamma(2v) = \mu v^2, \mu \neq 0$ 是任意常数,根据文[15] 建立系统(4) 的辅助系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + F_i^T\theta + \mu G_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} G_k \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u - \alpha(w) + F_n^T\theta + \mu G_n \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} G_k \\ e &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

定义1^[15] 若存在 K_∞ 类函数 γ ,其导数 $\dot{\gamma}$ 也是 K_∞ 类函数,并且存在值函数 $T(x) = T^T(x) > 0, l(x) > 0, E(x) > 0$,以及连续反馈控制律 $u = u^*$ 能够使得如下所示的目标泛函达到最小

$$J(u) = \sup_{d \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} [E(x) + \int_0^t [(\rho + 1)2u^T T(x)u - 4\gamma(\frac{\rho}{4} |d|) + l(x)] dv] \right\} \quad (8)$$

则称关于系统(4) 的逆优化控制问题可解,式中 D 为 x 的有界区域, $u^*(0) = 0$ 。

本文的目标是要设计控制器,使得系统(4) 中的信号是半全局最终一致有界的,并且目标泛函 $J(u)$ 可以达到最小。

定义状态误差变量如下

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

设计一个CLF的形式为 $V = V_\eta + V_0$,式中 $V_\eta =$

$$\frac{1}{2} \tilde{\eta}^T R \tilde{\eta}, \tilde{\eta} = \hat{\eta} - \eta - Ne, V_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2 + \frac{1}{2\kappa} \tilde{\theta}^T \theta, \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}, \kappa > 0$$

为待设计常数, $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计值, $R = R^T$ 满足 $M^T R + R M = -2U, U$ 为正定矩阵。

由式(7) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= (M + N\psi)\hat{\eta} - (M + N\psi)\eta + \chi(\cdot) - N(x_2 + \\ &F_1^T\theta + \mu G_1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} G_k) \end{aligned} \quad (10)$$

函数 $\chi(\cdot)$ 设计如下

$$\chi(\cdot) = - (M + N\psi)Ne + N(x_2 + \mu G_1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} G_k)$$

则有

$$\dot{V}_\eta = - \tilde{\eta}^T S \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \psi^T N^T R \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T R N \psi \tilde{\eta} -$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\eta}^T R N F_1^T \theta - \frac{1}{2} \theta^T F_1 N^T R \tilde{\eta} \quad (11)$$

根据 Young's 不等式, 可得如下不等式

$$-\frac{1}{2} \tilde{\eta}^T R N F_1^T \theta \leq \frac{1}{4} \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \frac{1}{4} \|R N\|^2 L^2 \theta^T \theta \quad (12)$$

将式(12)代入式(11), 得

$$\dot{V}_\eta = -\Lambda \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \|R N\|^2 L^2 \theta^T \theta \quad (13)$$

式中 $\Lambda = \lambda_{\min}(U) - \lambda_{\max}(R N \psi) - 1/2$ 。

由式(7)和式(9)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{k=1}^{n-1} (z_k - \sum_{i=k+1}^{n-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}) [x_{k+1} + \mathbf{F}_k^T \theta + \\ &\mu G_k (\sum_{j=i}^n (z_j - \sum_{i=j+1}^n z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j}) G_j)^T] + z_n [\mathbf{F}_n^T \theta + \\ &\mu G_n (z_n G_n)^T + u - \alpha(\mathbf{w})] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{选取 } H_k = G_k - \sum_{i=1}^{k-1} G_i \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i}, Y_k = \mathbf{F}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{F}_i \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i},$$

则有如下等式

$$\begin{aligned} \mu (\sum_{i=1}^n H_i z_i) (\sum_{k=1}^n H_k z_k)^T &= \mu \|H_n\|^2 z_n^2 + \mu \sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{j=k+1}^n H_j z_j) H_k z_k + \\ \mu z_n (\sum_{k=1}^{n-1} H_k z_k) H_n &+ \mu \sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^k H_j z_j) H_k z_k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (z_k - \sum_{i=k+1}^{n-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k}) (x_{k+1} + \mathbf{F}_k^T \theta) &= z_n z_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} z_k (z_{k-1} + \\ \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1}) &+ \sum_{k=1}^n Y_k z_k \theta - z_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \end{aligned} \quad (16)$$

同时有

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} = - \sum_{k=1}^n (z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}}) - \kappa^{-1} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = - \sum_{k=1}^n z_k (\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial t}) \quad (18)$$

则有 $\dot{V}_0$ 为

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= z_n (\mu \|H_n\|^2 z_n + 2\mu (\sum_{k=1}^{n-1} H_k z_k) H_n + z_{n-1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} - \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} + u - \alpha(w)) + \sum_{k=1}^{n-1} z_k (2\mu \sum_{j=1}^k H_j z_j) H_k + \\ &z_{k-1} + \alpha_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_i} x_{i+1} - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} + \mu \|H_i\|^2 z_i) + \\ &\sum_{k=1}^n Y_k z_k \theta - \kappa^{-1} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad (19)$$

根据式(19), 虚拟控制律 α_k 可以被设计为

$$\alpha_k = -c_k z_k - z_{k-1} - \mu \|H_k\|^2 z_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_i} x_{i+1} -$$

$$Y_k^T \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - 2\mu (\sum_{j=1}^k H_j z_j) H_k + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial t} \quad (20)$$

式中 $c_k > 0$, 则式(19)可以变成

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n (\mu \|H_n\|^2 z_n + u - \alpha(w) + z_{n-1} - \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - 2\mu (\sum_{k=1}^n H_k z_k) H_n + Y_n \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} - \\ &\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}}) + \kappa^{-1} \tilde{\theta}^T (\kappa \sum_{k=1}^n Y_k z_k - \dot{\hat{\theta}}) \end{aligned} \quad (21)$$

选取自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = \kappa \sum_{k=1}^n Y_k z_k - \sigma \hat{\theta} \quad (22)$$

式中 $\sigma > 0$ 为常数。

由式(9)可知, 当 $z = 0, x = 0$ 时, $\alpha_k = 0$, 利用均值定理, 则存在函数 ϕ_k , 使得下式成立

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + Y_n \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \phi_k z_k \quad (23)$$

将式(22)和式(23)代入式(21), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n (u - \alpha(w) + 2\mu \|H_n\|^2 z_n + \\ &\sum_{k=1}^n \Phi_k z_k) + \frac{\sigma}{\kappa} \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \end{aligned} \quad (24)$$

式中: $\Phi_k = \phi_k + 2\mu H_k^T H_n, k = 1, 2, \dots, n-2, \Phi_{n-1} = \phi_{n-1} + 2\mu H_{n-1}^T H_n + 1, \Phi_n = \phi_n$ 。

将控制输入 u 设计为

$$\begin{aligned} u &= \psi \hat{\eta} - \psi N e - (c_n + \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_k^2}{2c_k} + \frac{1}{2} + \mu \|H_n\|^2) z_n \\ &= \psi \hat{\eta} - \psi N e - T^{-1}(x) z_n \end{aligned} \quad (25)$$

根据设计的控制器(25), 式(24)可以变为

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + z_n \psi \tilde{\eta} - \frac{1}{2} z_n^2 - \\ &\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (z_k - \frac{\Phi_k}{c_k} z_n)^2 + \frac{\sigma}{\kappa} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (26)$$

由 Young's 不等式, 有

$$z_n \psi \tilde{\eta} \leq \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} \|\psi\|^2 \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} \quad (27)$$

因此, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 - \Psi \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} + \frac{\sigma}{\kappa} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \\ &\frac{1}{2} \|R N\|^2 L^2 \theta^T \theta \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\Psi = \Lambda - \frac{1}{2} \|\psi\|^2$ 。通过 Young's 不等式, 得

$$\frac{\sigma}{\kappa} \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \leq \frac{\sigma}{2\kappa} \theta^T \theta - \frac{\sigma}{2\kappa} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (29)$$

故式(28)变为

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 - \Psi \tilde{\eta}^T \tilde{\eta} - \frac{\sigma}{2\kappa} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + D \quad (30)$$

式中 $D = \frac{1}{2} \|RN\|^2 L^2 \theta^T \theta + \frac{\sigma}{2\kappa} \theta^T \theta$.

定理1 对于系统(4)和辅助系统(7),若假设1和2成立,则存在内模(5),自适应控制律(22)和控制器(25),使得系统(4)中的所有信号都是半全局最终一致有界的,另外,控制输入 $u^* = -\rho u$ 可以使得如下的目标泛函达到最小

$$J(u) = \sup_{d \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[2\rho V(x) + \int_0^t \left[-4\gamma \left(\frac{\rho}{4} |d| \right) + (\rho + 1)^2 u^T T(x) u + l(x) \right] dv \right] \right\} \quad (31)$$

式中 $\rho \geq 2$, 并且

$$l(x) = -2\rho \left[-\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} \dot{\tilde{\eta}} + \frac{\partial V}{\partial w} S w + l\gamma(2 |L_c V|) + L_B V(u - \alpha(w)) + L_F V \right] + 2(\rho - 2)l\gamma(|L_c V|) \quad (32)$$

证明:将参数 δ 取为

$$\delta = \min \{c_k, \sigma, 2\Psi/\lambda_{\max}(R), k = 1, 2, \dots, n\} \quad (33)$$

则有

$$\dot{V} \leq -\delta V + D \quad (34)$$

根据文[15]可知逆最优控制输入可以设计为 $u^* = -\rho u$, 其中 $\rho \geq 2$ 是一个待设计的参数,下面证明 u^* 可使目标泛函(32)最小。

先将式(4)写成如下形式

$$\dot{x} = F(x, \theta) + G(x)d + B(u - \alpha(w)) \quad (35)$$

式中: $F(x, \theta) = [x_2 + F_1^T \theta, \dots, F_n^T \theta]^T$, $G(x) = [G_1, G_2, \dots, G_n]^T$; $B = [0, 0, \dots, 1]^T$, 则式(35)的辅助系统为

$$\dot{x} = F(x, \theta) + G(x)l\gamma(2 |L_c V|) \frac{(L_c V)^T}{|L_c V|^2} + B(u - \alpha(w)) \quad (36)$$

由于闭环系统系统(4)稳定,根据文[15],由Lasalle-Yoshizawa定理知存在一个连续且正定的函数 $W(x)$,使得

$$L_F V + l\gamma(2 |L_c V|) + L_B V(u - \alpha(w)) - \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} \dot{\tilde{\eta}} + \frac{\partial V}{\partial w} S w \leq -W(x) \quad (37)$$

从而,式(32)满足

$$l(x) \geq 2\rho W(x) + 2(\rho - 2)l\gamma(2 |L_c V|) \quad (38)$$

因为 $\rho \geq 2$, $W(x) > 0$, $l\gamma$ 是一个 K_∞ 类函数,所以有 $l(x) > 0$,因此所提出的目标泛函(32)有意义。

将式(32)代入式(31),有

$$J(u) = \sup_{d \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t (2\rho V(x) - 2\rho \int_0^t dV + \int_0^t (u - u^*)^T T(x) (u - u^*) dv + \int_0^t [\rho \Delta(d, d^*)] dv) \right] \right\} \quad (39)$$

式中

$$\Delta(d, d^*) = -\frac{4}{\rho} \gamma \left(\frac{\rho}{4} |d| \right) + 2(L_c V)d - \frac{4}{\rho} l\gamma(2 |L_c V|), d^* = \frac{4}{\rho} (\gamma')^{-1}(2L_c V) \frac{(L_c V)^T}{|L_c V|}$$

由文[15]中的引理A1和引理A2,得

$$\Delta(d, d^*) \leq -\frac{4}{\rho} \gamma \left(\frac{\rho}{4} |d| \right) - \frac{4}{\rho} l\gamma \left(\gamma' \left(\frac{\rho}{4} |d^*| \right) \right) + \frac{4}{\rho} \gamma \left(\frac{\rho}{4} |d| \right) + \frac{4}{\rho} l\gamma \left(\gamma' \left(\frac{\rho}{4} |d^*| \right) \right) = 0$$

式中,当且仅当 $\frac{\rho}{4} d = (\gamma')^{-1}(\gamma'(\frac{4}{\rho} |d^*|))$

$\frac{(d^*)^T}{|d^*|}$, 即 $d = d^*$ 时, $\Delta(d, d^*) = 0$, 则有

$$\sup_{d \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t \rho \Delta(d, d^*) dv \right] \right\} = 0 \quad (40)$$

故新设计的逆最优控制器 $u = u^*$ 可以使得新提出的目标泛函 $J(u)$ 达到最小值

$$J_{\min}(u) = 2\rho V(0) \quad (41)$$

式中: $\rho \geq 2$ 是常数。综上两部分,定理得证。

4 仿真算例

考虑如下所示的非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + w_2 + \xi_1^2 \theta + w_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u - w_2 + d(t) \\ y &= \xi_1 \\ e &= y - w_1 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式中: $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$ 表示系统的状态; θ 表示未知参数向量; y 为输出; u 为控制; $d(t)$ 为系统的扰动; 这里取 $d(t) = \cos(2t)$; 外信号 $w = [w_1, w_2]^T$ 由以下的外系统产生

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -w_1 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

由式(3)得 $\pi_1(w) = w_1$, $\pi_2(w) = -w_1 - \theta w_1^2$, 令 $x = \xi - \pi$, 则可得到如下系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta(x_1^2 + 2x_1w_1) \\ \dot{x}_2 &= u - \alpha(w) \\ e &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

式中 $\alpha(w) = -2\theta w_1 w_2 - d$ 。

建立辅助系统如下

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta(x_1^2 + 2x_1w_1) \\ \dot{x}_2 &= u + 2\theta w_1 w_2 + \mu z_2 \\ e &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\text{选取 } \psi = [1 \ 3], M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

取 $\theta = 1$, 则内模方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_1 &= \hat{\eta}_2 - e \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= -\hat{\eta}_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

控制器和自适应律设计如下

$$\begin{aligned} u &= \hat{\eta}_1 + 3\hat{\eta}_2 - 3x_1 - \{c_2 + \frac{1}{2} + \mu + \frac{1}{2c_1}[1 - (c_1 \\ &+ 2(x_1 + w_1)\hat{\theta})(c_1 + (x_1 + 2w_1)\hat{\theta} - (x_1 + 2w_1)\hat{\theta})^2 \\ &+ \frac{1}{2c_2}[c_1 + (2x_1 + 2w_2)\hat{\theta})^2\}z_2 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \kappa(x_1^2 + 2x_1w_1)z_1 - \sigma\hat{\theta} \quad (48)$$

目标泛函(41)、控制器(47)和自适应律(48)中的参数选取如下: $\rho = 2, c_1 = 15, c_2 = 10, \mu = 1, \kappa = 1, \sigma = 0.000\ 000\ 1$, 系统(42)、(43)和内模(46)中各变量的初始值选取为: $\xi_1(0) = 0, \xi_2(0) = 0.3, w_1(0)$

$= 1, w_2(0) = 0.5, \hat{\eta}_1(0) = \hat{\eta}_2(0) = 0, \hat{\theta}(0) = 1$ 。

在本文所设计出的逆最优控制器(47)的作用下, 闭环系统的所有信号都能达到最终一致有界。图1和图2分别表示文[12]中所使用的方法和本文所提出方法得到的跟踪误差 e 的曲线, 通过对比发现本文的设计方法得出的跟踪误差收敛速度更快。图3表示系统(42)的输出信号 y 和参考信号 w_1 的时间曲线, 由图3可知输出信号能够跟踪参考信号。

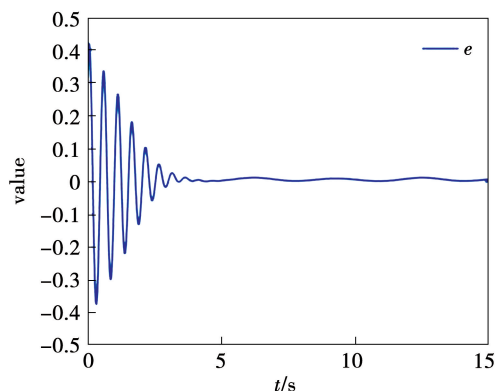


图1 使用文[12]的方法的跟踪误差

Fig.1 The tracking error with the method of [12]

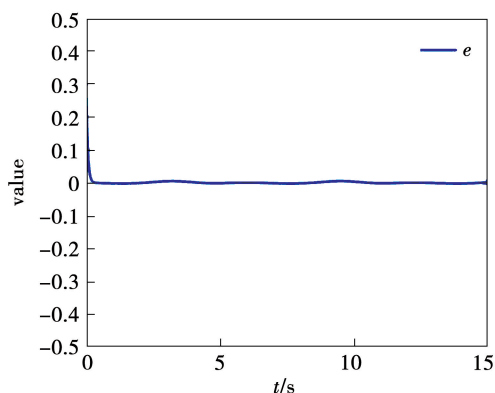


图2 使用本文方法的跟踪误差

Fig.2 The tracking error of this paper

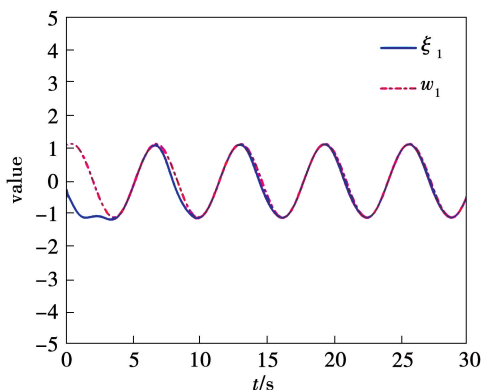


图3 本文的输出和参考信号

Fig.3 The output and reference signal of this paper

5 结论

本文针对一类由线性外系统驱动下的带有未知参数向量和外界扰动的非线性系统的最优输出调节问题, 提出了基于逆优化的自适应最优控制方法。通过坐标变换将输出调节问题转化为镇定问题, 建立与内模相关的辅助系统。将逆优化控制和自适应反步技术结合, 设计了基于状态反馈的逆最优自适应控制器和自适应律, 并提出新的目标泛函。稳定性分析证明了所提出的控制器能够使得整个闭环系统中的所有信号最终一致有界, 所给的目标泛函能够达到最小值。仿真算例表明了本文所提出的最优控制方法的有效性, 并且通过与没有采用逆优化的方法对比, 发现本文所得出的跟踪误差收敛速度更快。

参考文献:

- [1] FRANCIS B A, WONHAM W M. The Internal Model Principle of Control Theory[J]. Automatica, 1976, 12

- (5): 457.
- [2] FRANCIS B A, WONHAM W M. The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators [J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 1975, 2(2): 170.
- [3] 程代展, 董亚丽. 输出调节和内模原理[J]. *自动化学报*, 2003, 29(2): 284.
CHENG Daizhan, DONG Yali. Output Regulation and Internal Model Principle [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(2): 284.
- [4] MARINO R, TOMEI P. Output Regulation for Linear Systems via Adaptive Internal Model [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2199.
- [5] LI Jiao, ZHAO Jun. Output Regulation for Switched Discrete-time Linear Systems via Error Feedback: an Output Error-Dependent Switching Method [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(10): 847.
- [6] QIAN Yangyang, LIU Lu, FENG Gang. Event-triggered Robust Output Regulation of Uncertain Linear Systems with Unknown Exosystems [J]. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(7): 4139.
- [7] CHEN Zhiyong, HUANG Jie. Attitude Tracking and Disturbance Rejection of Rigid Spacecraft by Adaptive Control [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2009, 54(3): 600.
- [8] 孟桂芝. 不确定非线性系统的输出调节及其应用 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- [9] 崔雷. 非线性反馈系统的自适应输出调节及其应用 [D]. 南昌: 南昌航空大学, 2018.
- [10] LIN Wei, QIAN Chunjiang. Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Systems: the Smooth Feedback Case [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1249.
- [11] JIANG Yuan, DAI Jiyang. Adaptive Output Regulation of a Class of Nonlinear Output Feedback Systems with Unknown High Frequency Gain [J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2020, 7(2): 568.
- [12] 杜军, 邓涛. 自适应动态面输出调节方法 [J]. *信息与控制*, 2013, 42(3): 327.
DU Jun, DENG Tao. Adaptive Dynamic Surface Output Regulation Method [J]. *Information and Control*, 2013, 42(3): 327.
- [13] 许天舒, 史小平. 一类不确定非线性系统的最优控制 [J]. *哈尔滨理工大学学报*, 2000(6): 82.
XU Tianshu, SHI Xiaoping. Optimal Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems [J]. *Journal of Harbin University of Science and Technology*, 2000(6): 82.
- [14] KALMAN R E. When Is a Linear Control System Optimal? [J]. *Journal of Basic Engineering*, 1964, 86(1): 51.
- [15] KRISTIC M, LI Zhonghua. Inverse Optimal Design of Input-to-state Stabilizing Nonlinear Controllers [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1998, 43(3): 336.
- [16] 王俊, 奚宏生, 季海波, 等. 严格反馈随机非线性系统的自适应逆最优控制 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(6): 681.
WANG Jun, XI Hongsheng, JI Haibo, et al. Adaptive Inverse Optimal Control for Strict-Feedback Stochastic Nonlinear Systems [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(6): 681.
- [17] 王俊, 季海波, 奚宏生, 等. 严格反馈非线性系统的自适应逆最优控制 [J]. *中国科学技术大学学报*, 2002, 32(6): 713.
WANG Jun, JI Haibo, XI Hongsheng, et al. Adaptive Inverse Optimal Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems [J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2002, 32(6): 713.
- [18] LI Yongming, MIN Xiao, TONG Shaocheng. Observer-based Fuzzy Adaptive Inverse Optimal Output Feedback Control for Uncertain Nonlinear Systems [J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2021, 29(6): 1484.
- [19] LI Yongming, MIN Xiao, TONG Shaocheng. Adaptive Fuzzy Inverse Optimal Control for Uncertain Strict-feedback Nonlinear Systems [J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2020, 28(10): 2363.
- [20] ATTAULLAH YM. Optimal Output Regulation of Minimum Phase Nonlinear Systems [C]// *IEEE*, September 03–05 2012, Cardiff, UK., 2012: 490.

(编辑: 温泽宇)